МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования   
**«Национальный исследовательский   
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий**

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Профиль подготовки: «Вычислительная математика и суперкомпьютерные технологии»

Отчет по лабораторной работе №4

**«Современные проблемы прикладной математики и информатики»**

**Выполнил:** студент группы 381903-3м

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Панов А.А.

Подпись

Нижний Новгород  
2020

# Постановка задачи

На сетке необходимо численно решить следующие системы дифференциальных уравнений:

Уравнения 1 и 2 нужно решить методом Эйлера, сравнить полученные решения с аналитическими и построить график ошибки ξ (t). Уравнение 3 необходимо решить методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

Для уравнений первого порядка ξ (t) вычисляется как:

где - решение полученное аналитически, а - численное решение, полученное методом Эйлера с шагом .

В уравнении второго порядка производим замену и получаем систему из двух уравнений. Для такой системы вычисляем по следующей формуле:

В третьей системе вычисляем по следующей формуле, поскольку точное решение неизвестно.

# Решение

## Метод Эйлера

Если разложить функцию в ряд Тейлора в точке , получим:  
.

Рассмотрим задачу Коши:

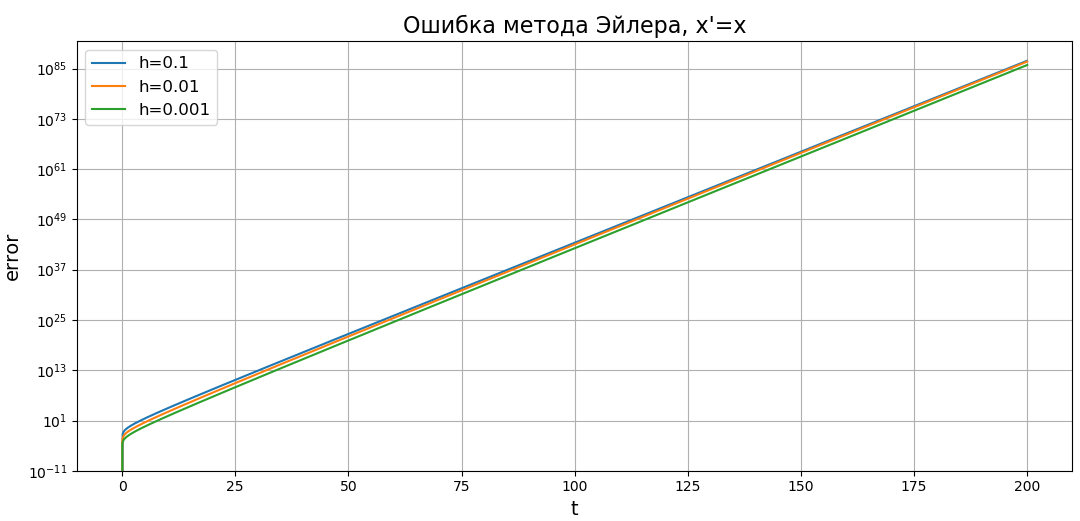
Приближенное значение в узлах сетки находится следующей формуле:

Погрешность каждого шага составляет . Так как общее количество шагов составляет , то глобальная погрешность метода равна . Это означает, что при уменьшении в два раза, погрешность также должна уменьшиться приблизительно в два раза.

## Уравнение

Аналитическое решение данного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными .

Так как при , ошибка при вычислении методом Эйлера будет расти. Как видно из графиков, ошибка растет экспоненциально.



Докажем экспоненциальный рост аналитически. Численное решение в точке:

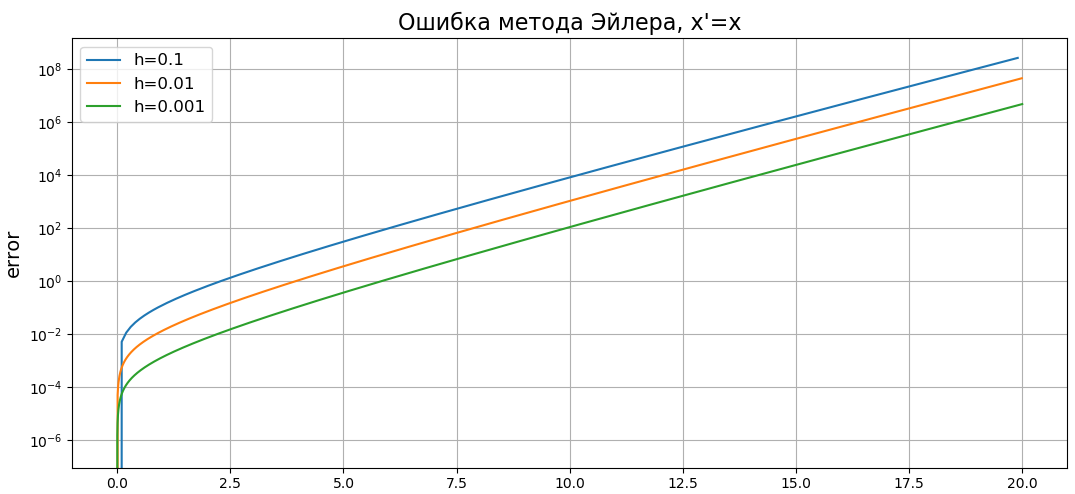
Аналитическое решение в точке

Найдем отношение аналитического и численного решения:

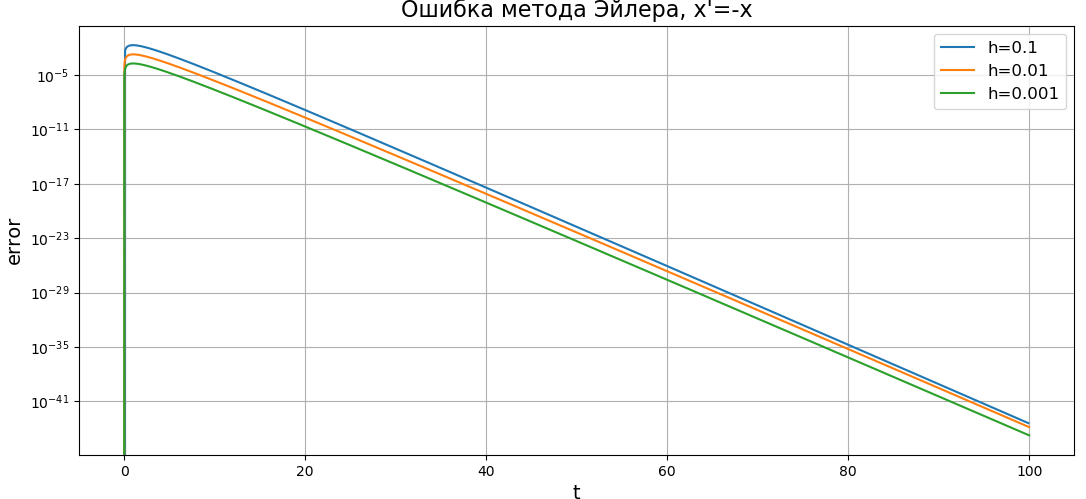
Теперь найдем разность аналитического и численного решения:

Полученная разность экспоненциально растет при увеличении , что и требовалось доказать.

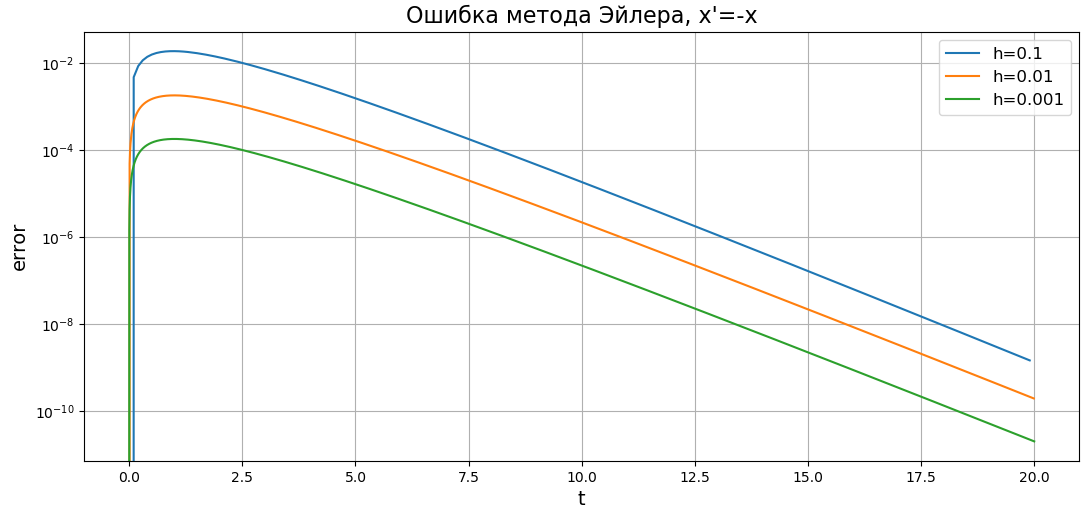
Также можно заметить, что при уменьшении в 10 раз, ошибка уменьшается приблизительно в 10 раз, что совпадает с теоретическими свойствами метода.



В данном уравнении при любых начальных условиях и . В таком случае ошибка при вычислении методом Эйлера с достаточно маленьким шагом при будет стремиться к .



Также можно заметить, что при уменьшении в 10 раз, ошибка уменьшается приблизительно в 10 раз, что совпадает с теоретическими свойствами метода.



## Уравнение

Данное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами легко решается с помощью характеристического уравнения.

Таким корням соответствует следующее общее решение:

После подстановки получаем, что , решение принимает вид:

Для численного решения методом Эйлера преобразуем уравнение к системе с помощью замены :

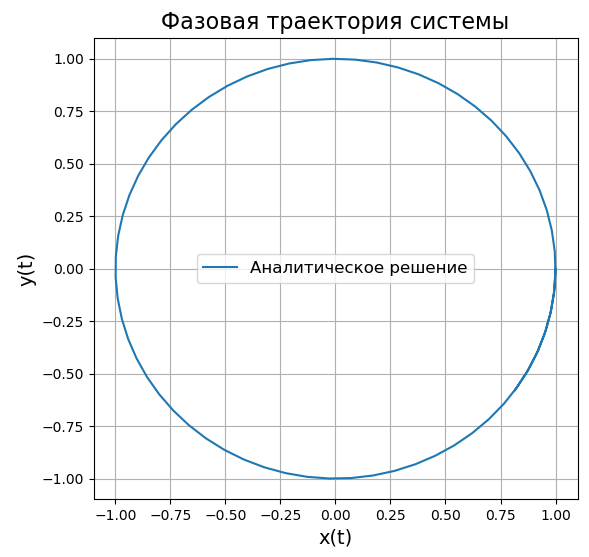
Формула для метода Эйлера в таком случае будет выглядеть так:

Аналитическое решение данной системы:

Точка равновесия:

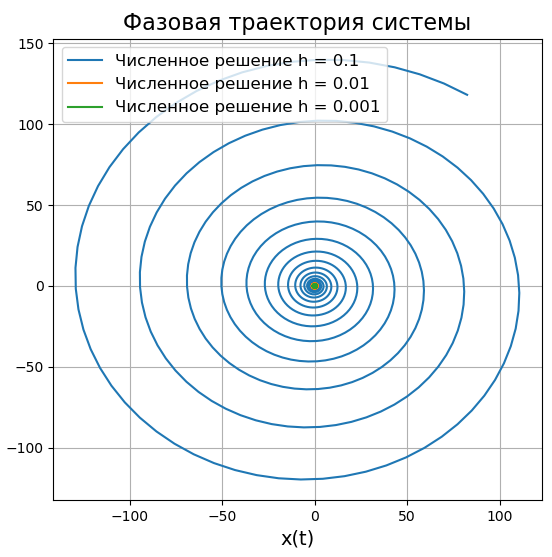
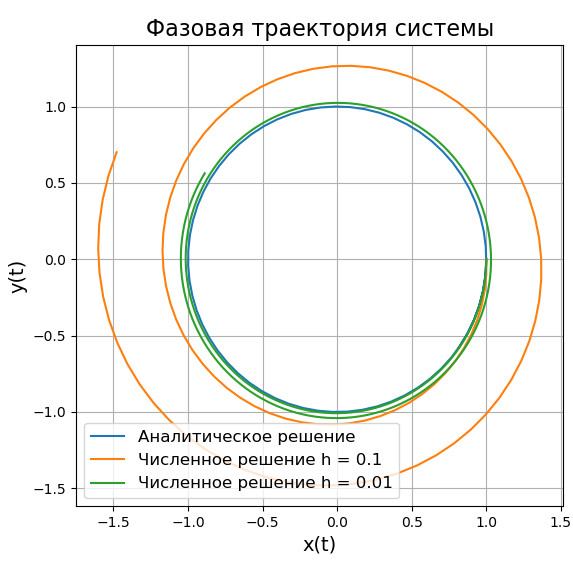
Так как чисто мнимые, то точка – центр, а значит состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

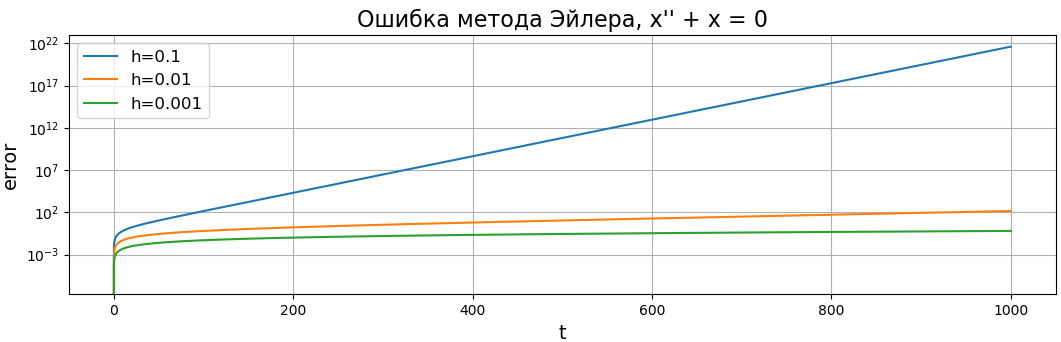
Фазовая траектория данной системы – окружность с радиусом .



Выразим и через и (с помощью формулы Эйлера) и найдем, во сколько раз увеличивается радиус траектории:

Таким образом, с каждой итерацией радиус траектории будет увеличиваться в раз, следовательно, численная ошибка будет неограниченно расти.

В примере cлева расчет выполнялся до T = 10, в примере справа расчет выполнялся до   
T = 100.



## Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Рассмотрим задачу Коши:

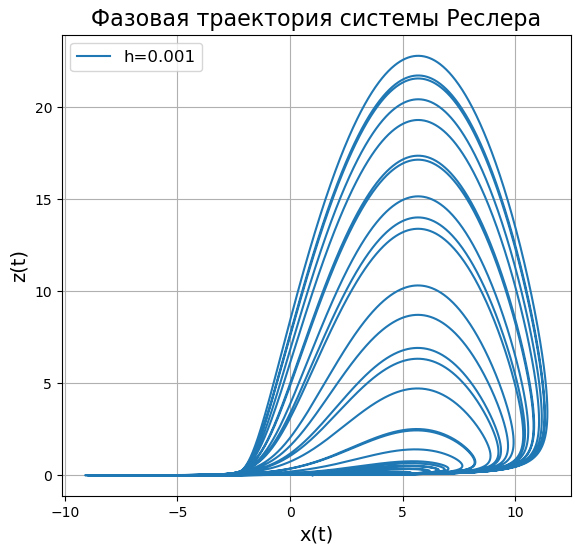
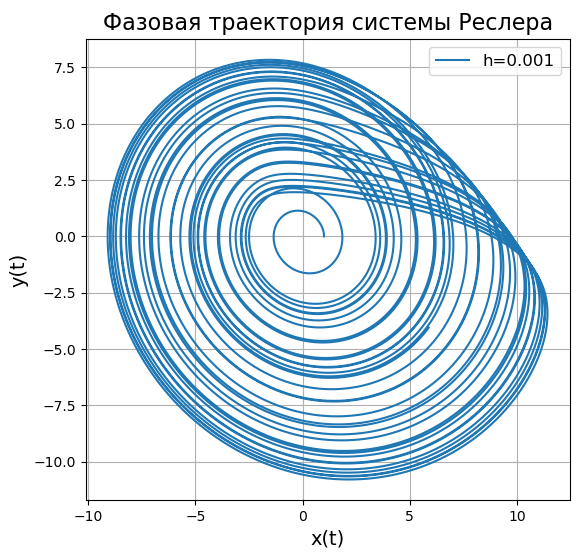
Приближенное значение в узлах сетки находится следующей формуле:

Погрешность метода порядка .

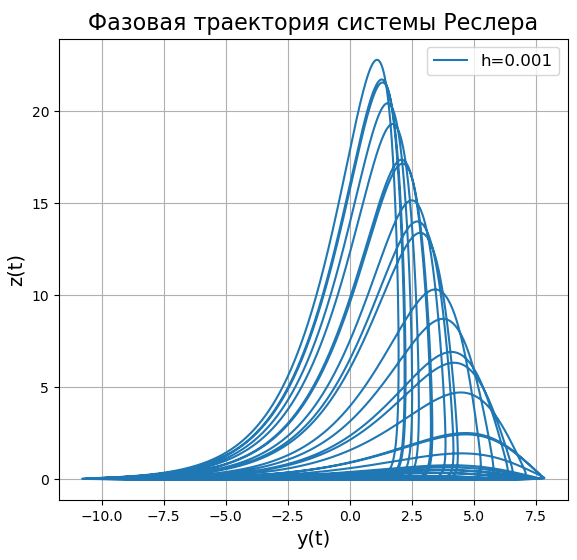
## Система Реслера

Система Реслера имеет вид:

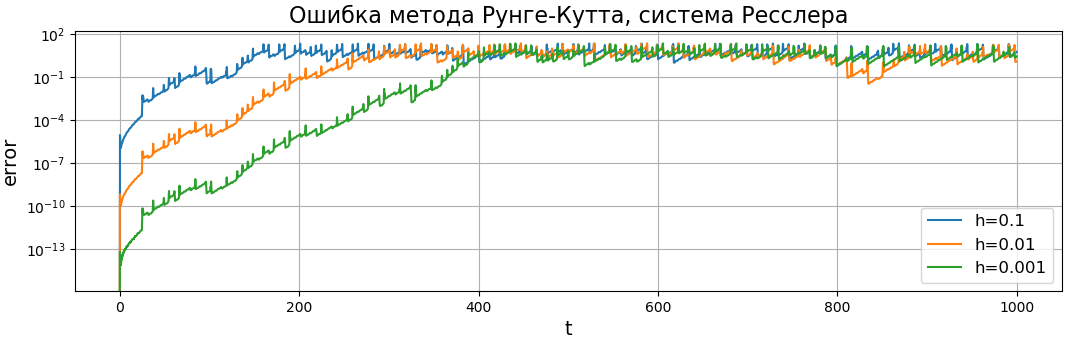
По условию задачи a=0.2, b=0.2, r=5.7. Из начальной точки x0 = (1, 0, 0) численно были получены проекции траектории системы на координатные плоскости.



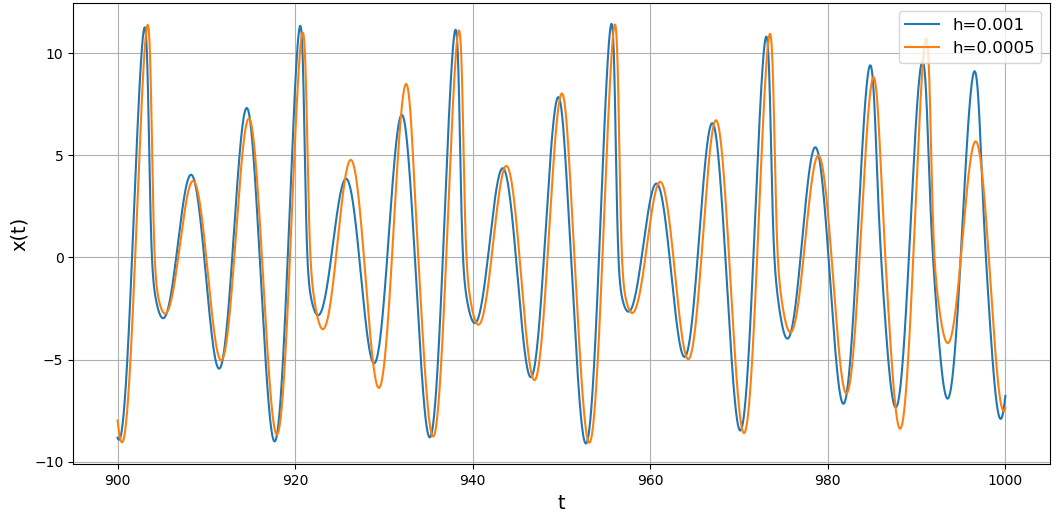
Точки решения системы образуют хаотический аттрактор, который начинается в точке x0 и закручивается в спираль (в плоскости XY). При этом в плоскостях XZ, YZ происходит цикличное увеличение и уменьшение значения z.



Численная ошибка метода Рунге-Кутта 4 порядка постепенно растет, но перестает увеличиваться, достигнув определенных значений. Скорее всего, это связано с тем, что численное решение не выходит за пределы аттрактора, а значит ошибка ограничена.



Также можно заметить, что при уменьшении h в 10 раз, ошибка уменьшается приблизительно в 104 раз, что совпадает с теоретическими свойствами метода.



Начиная с некоторого из-за численной ошибки метод Рунге-Кутта 4 порядка даже при небольшом изменении может породить довольно сильно отличающиеся траектории.